

Herkunft der Zahlen



2h 1h

Zielgruppe

- Klassenstufe 2
- Kenntnisse der Grundrechenarten Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100
- Vorerfahrungen zur Stellenwerttafel und dem flexiblen Umbündeln



Inhalt des Beitrags

„Woher kommen die Zahlen?“

- Zählen ohne Zahlen
- Lernen von Zahlen und Zählen
- Entstehung der Zahlen
 - erste Zahldarstellungen (Strichlisten in Zählknochen etc.)
 - Erfindung des heutigen Dezimalsystems

Lernziele

- Die Kinder verstehen den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems, indem sie Anzahlen im Zahlenraum bis 100 sinnvoll im Dezimalsystem bündeln.
- Die Kinder können die historische Entwicklung von Zahlen und Zahlssystemen Überblickhaft nachvollziehen.
- Die Kinder können argumentieren, wann und wo Zahlen im Alltag nützlich sind.

Inhaltsfelder

- Zahl(en) und Operation(en)
- Muster und Strukturen

Geförderte allgemeine mathematische Kompetenzen

- Darstellen
- Kommunizieren
- Argumentieren

Geförderte überfachliche Kompetenzen

- Lernkompetenz, v. a. Medienkompetenz
- Sprachkompetenz, v. a. Kommunikationskompetenz
- Sozialkompetenz

Sachanalyse des Themas „Herkunft der Zahlen und Stellenwertsystem“

Herkunft der Zahlen

Zahlen sind Konstrukte unseres Denkens, die geeignet sind, Wirklichkeit zu beschreiben.

Raum und Zeit lassen sich mit Zahlen erfassen. Mit Zahlen kann man Aussagen über die unbelebte und belebte Natur machen. In der Technik werden auf der Grundlage von Formeln neue Produkte entwickelt. Das menschliche Verhalten wird wissenschaftlich mit Zahlen untersucht (Soziologie, Psychologie...) (vgl. Vollrath & Weigand 2007, zit. nach Schreiber, VL03, Modul1 WS2018/19, Folie 7).

Eines der ältesten Zeugnisse der Verschriftlichung von Anzahlen ist ein Fund aus der Jungsteinzeit (etwa 10. bis 4. Jahrtausend v. Chr.). Es handelt sich hierbei um Strich-Markierungen auf einem Wolfsknochen, der in Vestonice (Tschechien) gefunden wurde.

Das Wort *Zahl* entwickelte sich aus dem althochdeutschen Wort *zala*: „eingekerbtes Merkzeichen“ (vgl. Schreiber, VL03, Modul1 WS2018/19, Folie 10).

Unsere heutigen Ziffern entwickelten sich erstmals in Indien und wurden im Wesentlichen durch Leonardo Fibonacci im 13. Jahrhundert verbreitet.

Stellenwertsystem

Jede natürliche Zahl kann im Stellenwertsystem durch Ziffern dargestellt werden. Unser *Dzimalsystem* stellt Zahlen zur Basis 10 dar und ist unser alltägliches Zahlssystem.

Es besteht aus 10 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Zahlen, die größer als 9 sind, setzen sich aus mehreren Ziffern zusammen. Sie werden zur nächsthöheren dekadischen Einheit (Einer, Zehner, Hunderter, ...) zusammengefasst.

Jede Zahl besteht aus Ziffernwerten (0 bis 9) und Stellenwerten (E, Z, H, ...).

Beispiel: 716 → Ziffernwerte: 7, 1, 6
 → Stellenwerte: 7H, 1Z, 4E

Binär- und Hexadezimalsystem stellen Zahlen zur Basis 2 bzw. 16 dar. Sie werden heute in der Datentechnik bzw. Datenverarbeitung genutzt.

Das grundlegende Prinzip unseres Stellenwertsystems ist die *fortgesetzte Bündelung*. Jede Menge kann durch fortgesetztes Bündeln eindeutig und schnell erkennbar dargestellt werden. Dieses Prinzip bezieht sich auf die Bündelung einer realen Menge. Im dekadischen System werden immer Zehner-Bündel zusammengefasst. Die Bündelung wird fortgesetzt, bis kein neues Bündel mehr voll wird. Außerdem werden fertige Bündel ihrerseits auch wieder zusammengefasst, wenn es mehr als zehn ihrer Sorte gibt. Aus Zehner-Bündeln entstehen auf diese Weise Hunderter-Bündel, aus diesen können Tausender-Bündel entstehen etc.

Basis

Die Basis beschreibt die Anzahl der in einem Bündel enthaltenen Elemente bzw. die Menge an Elementen, die zu einem Bündel zusammengefasst wird.

Im untenstehenden Beispiel wäre die Basis also 6.

Ziffern

Wenn die Basis eines Systems b ist, gibt es in diesem System genau b Ziffern.

Im Beispiel unten gibt es folglich die sechs Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 und 5.

Stelle und Stellenwert

Der Platz einer Ziffer heißt Stelle. Jeder Stelle wird ein Stellenwert zugeordnet.

Beispiel: $(152)_6 = 1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$

Um deutlich zu machen, in welchem Stellenwertsystem man eine Zahl ausdrückt, benutzt man einen Index, der die Basis angibt.

Eine *Stellenwerttabelle* (auch Stellenwerttafel) ordnet die Zahlen ein.

Folgende Stellenwerte gibt es:

Einer (E), Zehner (Z), Hunderter (H), Tausender (T), Zehntausender (ZT), Hunderttausender (HT), Millionen (M), Zehnmillionen (ZM), Hundertmillionen (HM), Milliarden (Md), Zehnmilliarden (ZMd), Hundertmilliarden (HMd), Billionen (B), ...

Die Gesamtanzahl der Objekte wird benannt, indem die Zahlen benannt werden (Eintausend-dreihundert-zwei-und-vierzig) oder die Bündelungseinheiten bzw. Stellenwerte (ein Tausender und drei Hunderter und vier Zehner und zwei Einer oder Dreihundert-und-vierzig-und-zwei-und-tausend).

Weiterhin gelten die Prinzipien des Stellenwertes und des Nennwertes. Das Prinzip des Stellenwertes gibt vor, in welcher Reihenfolge die einzelnen Bündel angeordnet werden, nämlich indem rechts beginnend die Bündelungseinheiten nach links ansteigen. Nach diesem System stehen ganz links die Einer, links daneben werden die Zehnerbündel notiert, links daneben die Hunderterbündel usw. Dies ist die Reihenfolge der Stellenwerte, wie wir sie zum Aufschreiben und Lesen verwenden. Das Prinzip des Nennwertes regelt, dass an der entsprechenden Stelle (also beim passenden Stellenwert) die Anzahl der jeweiligen Bündel notiert wird.

Vorgefertigte Repräsentanten für Tausender, Hunderter, Zehner und Einer dienen den Kindern dazu, das Prinzip der fortgesetzten Bündelung nachzuvollziehen. Zehnersystemblöcke können dazu zu einer besseren Zahlvorstellung beitragen.

Zahlvorstellungsvermögen befähigt uns, zwischen dem notierten Zahlzeichen einer Zahl, dem dazugehörigen Zahlwort und der entsprechenden (vorgestellten) Menge hin und her zu übersetzen.

Unterrichtsablauf der ersten Sequenz

2h

Die Schüler*innen ...

- können Beispiele dafür nennen, wo und warum wir im Alltag Zahlen bzw. das Zählen brauchen.
- können den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems nachvollziehen und Anzahlen im Zahlenraum bis 100 sinnvoll bündeln.
- können Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 100 lösen.

Zeit/Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Methoden und Medien
10 Minuten / Begrüßung und Einführung	Nach der Begrüßung überlegen die Kinder, wo sie in ihrem Alltag mit Zahlen und Zählen konfrontiert werden: - „Wo begegnen dir Zahlen im Alltag, wann musst du zählen?“ - „Schreibe Wörter auf oder male Momente, die dir dazu einfallen.“	L-S-Gespräch, Plenum Projekttagbuch (Seite 1)
10 Minuten / Hinführung	Radiobeitrag „Woher kommen die Zahlen?“ (00:00-02:59 Min) abspielen, die Kinder hören zu. <i>Inhalt des Radiobeitrags:</i> - <i>Zählen von Schafen: Vergleich von Mengen ohne Verwendung von Zahlen</i> Der Ausschnitt aus dem Radiobeitrag wird reflektiert und Unklarheiten werden ausgeräumt. Es wird besprochen, wie man Mengen auch ohne Zählen vergleichen kann.	L-S-Gespräch, Plenum Audio Radiobeitrag
20 Minuten / Arbeitsphase I	Die Kinder stellen in Zweierteams die im Radiobeitrag gehörten Überlegungen nach, indem sie Schafe auf Bildern zählen: - „Versuche selbst mal, wie gut man Schafe zählen kann, ohne Zahlen zu verwenden.“ Hierfür schätzen die Kinder zunächst, auf welchem Wimmelbild mehr Schafe zu sehen sind. Anschließend streicht ein Kind immer ein Schaf auf dem Bild durch. Das andere legt pro durchgestrichenem Schaf eine Bohne in ein Glas. Das Procedere wird beim zweiten Schafsbild wiederholt. - „In welchem Glas sind mehr Bohnen? Sind es ungefähr gleich viele? Hast du gut geschätzt?“ Das Ergebnis wird unter die Schätzung auf das AB geschrieben. Außerdem probieren sie anhand des Schafbeispiels auch das Prinzip des Zählknochens aus (pro Schaf ein Strich auf den abgebildeten Knochen).	SuS-Aktivität, Partnerarbeit Projekttagbuch (Seite 2 & 3) Wimmelbilder (Schafe zählen) Sonstiges: Folienstift, verschiedene Behälter mit Bohnen, zwei gleichgroße Trinkgläser

Methodisch- didaktischer Kommentar

Im Rahmen des Brainstormings zum Gebrauch von Zahlen und dem Zählen im Alltag (heute und ggf. früher) soll das Interesse der Kinder für das Thema geweckt und der direkte Lebensweltbezug bewusst gemacht werden.

Das Abspielen des Radiobeitrags kann ggf. pausiert oder wiederholt werden, um ein vollständiges Verständnis des Gehörten zu gewährleisten.

Um die in der Audiosequenz geschilderten Überlegungen nachzuvollziehen, erhalten die Kinder ähnliches Material wie das der Kinder im Beitrag.

5 Minuten / Besprechung	Die Kinder erläutern, welche Vorgehensweise sie einfacher finden, und begründen ihre Wahl. - „Ist das jetzt wirklich einfacher gewesen? Schreibe deine Gedanken unter den Zählknochen.“	L-S-Gespräch, Plenum
20 Minuten / Erarbeitung II	Radiobeitrag „Woher kommen die Zahlen?“ (08:07-08:49 Min) abspielen, die Kinder hören zu. <i>Inhalt des Radiobeitrags:</i> - <i>Stellenwertsystem</i> Auf Grundlage der Erklärungen im Radiobeitrag bündeln die Kinder die Bohnen zunächst enaktiv in einer großen Stellenwerttafel, malen ihr Ergebnis danach ikonisch auf ein Plakat. und schreiben es schließlich symbolisch als Ziffern in die Stellenwerttafel in ihrem Arbeitsheft.	S-Aktivität, Einzelarbeit Projekttagbuch (Seite 4) Audio Radiobeitrag Sonstiges: Plakat, Stifte, ein Bohnenglas
10 Minuten / Sicherung	Ein gemeinsam entwickelter Merksatz wird von den Kindern in ihr Heft geschrieben. Möglicher Merksatz: „Es ist wichtig, dass wir die Einerstellen nicht mit den Zehnerstellen vertauschen, weil sonst ganz andere Zahlen entstehen.“	L-S-Gespräch, Plenum Projekttagbuch (Seite 5)
10 Minuten / Übung	Die Kinder rechnen einige Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Zehnerübergang. Ihre Ergebnisse gleichen sie mit einem Lösungsblatt an einem separaten Tisch ab.	S-Aktivität, Einzelarbeit Projekttagbuch (Seite 4 & 5) Lösungsblatt
5 Minuten / Abschluss	Die Sequenz wird kurz reflektiert und ein Ausblick auf die nächste Stunde gegeben.	L-S-Gespräch, Plenum

Methodisch- didaktischer Kommentar

Indem die Kinder erklären, welche Vorgehensweise sie einfacher finden, und ihre Wahl begründen, werden die Kompetenzen des Kommunizierens und Argumentierens unterstützt.

Das Bündeln erfolgt stufenweise auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch), um die Kinder Schritt für Schritt an das abstrakte Bündelungsprinzip mit Ziffern (symbolisch) heranzuführen.

Der Merksatz sollte wenn möglich gemeinsam mit den Kindern entwickelt werden, um das Mitdenken und Verstehen der Kinder zu aktivieren.

Unterrichtsablauf der zweiten Sequenz



Die Schüler*innen ...

- können alternative (historische) Zahlensysteme nachvollziehen, indem sie Zahlen im arabischen und römischen System darstellen.

Zeit/Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Methoden und Medien
5 Minuten / Begrüßung	Die Lehrkraft begrüßt die Kinder und stellt ggf. einen kurzen Bezug zur vorigen Sequenz her.	L-Vortrag, Plenum
15 Minuten / Einstieg	Radiobeitrag „Was mit wem wie oft?“ (07:22-08:05 Min) abspielen, die Kinder hören zu. <i>Inhalt des Radiobeitrags:</i> - <i>andere Zahlensysteme</i> Im Anschluss entziffert die gesamte Lerngruppe gemeinsam die römischen Zahlen mithilfe eines Memory-Spiels (mindestens bis 20 = XX, höchstens bis 100 = C). - Vorgehen: mit der 1 beginnen, ggf. zu 5 und 10 Tipps geben	L-S-Gespräch, Plenum Audio Radiobeitrag Sonstiges: Memory-Karten mit römischen und arabischen Zahlen (bis 100)
10 Minuten / Arbeitsphase	Die Kinder erledigen die Zuordnungsaufgabe in ihrem Arbeitsheft in Einzelarbeit. Möglichkeit zur Differenzierung: - Rechenaufgabe mit römischen Zahlen auf dem AB	SuS-Aktivität, Einzelarbeit Projektstagebuch (Seite 6)
5 Minuten / Sicherung	Die Ergebnisse werden verglichen.	L-S-Gespräch, Plenum
10 Minuten / Reflexion	Abschließend wird im Plenum gesammelt, was gelernt wurde, was die Kinder interessant fanden, ob sie gerne häufiger mit Radiobeiträgen arbeiten würden etc. Eine kurze individuelle Reflexion halten die Kinder auf der letzten Seite (Rückseite) ihres Arbeitshefts fest. Zum Schluss kann der gesamte Radiobeitrag vollständig angehört werden.	L-S-Gespräch, Plenum Projektstagebuch Audio Radiobeitrag

Methodisch- didaktischer Kommentar

Das gemeinsame Memory-Spiel soll einen spielerisch-experimentellen Zugang zu einem anderen Zahlensystem (in diesem Fall dem römischen) eröffnen, der das Interesse und die Neugier der Kinder weckt.

Falls die Kinder im Übersetzen römischer in unsere Zahlen sehr sicher sind, können sie sich an einer leichten Rechenaufgabe versuchen.

Die Dokumentation der Aufgaben im Arbeitsheft über die gesamte Einheit hinweg ermöglicht eine weitgehende Transparenz über den Lernzuwachs und kann darüber hinaus als motivationaler Anreiz für die Kinder dienen, indem sie am Ende ein eigenes, materielles „Lernprodukt“ erhalten.

Zum Material

Inhalt der Materialboxen (pro Kind)

- 1x Projekttagbuch (siehe Material zu Sequenz 1 und 2)
- 2x Folienstifte
- 1x Säckchen mit weißen Bohnen/Murmeln o. ä.
- 2 verschiedene Herdenbilder (jeweils ca. 70 Schafe)
- 1x Memory-Karten mit römischen und arabischen Zahlen bis 20 bzw. bis 100

Literaturverzeichnis

Hessisches Kultusministerium (2011): Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Primarstufe, Mathematik. Wiesbaden. Online verfügbar unter:

https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kc_mathematik_prst_2011.pdf, zuletzt abgerufen am: 11.08.21.

Schreiber, Christof (2018): Modul M 01. Mathematik für die Klassen 1-6. V03. Zahlen, Zahlenaspekte, figurierte Zahlen. Vorlesung. Gießen: Justus-Liebig-Universität.

Vollrath, Hans-Joachim / Weigand, Hans-Georg (2007): Algebra in der Sekundarstufe. 3. Auflage. Heidelberg: Spektrum Verlag

o. A. (o. J.): Stellenwertsysteme. Serlo: Die freie Lernplattform. Online verfügbar unter:

<https://de.serlo.org/mathe/28903/stellenwertsysteme>, zuletzt abgerufen am: 15.08.2021

o. A. (o. J.): Stellenwertverständnis – Einstieg. Primakom: Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik. Online verfügbar unter: <https://primakom.dzlm.de/node/282>, zuletzt abgerufen am: 15.08.2021.

o. A. (o. J.): Natürliche Zahlen im Stellenwertsystem darstellen. Mathe-Lexikon. Online verfügbar unter: <https://www.mathe-lexikon.at/arithmetik/natuerliche-zahlen/stellenwertsystem.html>, zuletzt abgerufen am: 15.08.2021.

Radiobeitrag

Radiobeitrag: „Woher kommen die Zahlen?“ (Kinderfunkkolleg Mathematik), verfügbar unter: <https://www.kinderfunkkolleg-mathematik.de/themen/woher-kommen-die-zahlen>

Begleitmaterial zu „Herkunft der Zahlen“, Sequenz 1 und 2

Die folgenden Seiten beinhalten das Begleitmaterial zur Unterrichtseinheit „Herkunft der Zahlen“, Sequenz 1 und 2. Alle Arbeitsblätter sind als Klassensatz auszudrucken. Fett gedruckte Arbeitsblätter sind nur für die Lehrkraft als Unterrichtsmaterial gedacht.

Inhalt

Projekttagbuch – „Herkunft der Zahlen“	1
Projekttagbuch – Seite 1	2
Projekttagbuch – Seite 2	3
Projekttagbuch – Seite 3	4
Projekttagbuch – Seite 4	5
Projekttagbuch – Seite 5	6
Projekttagbuch – Seite 6	7
Wimmelbilder – Schafe zählen	8

Projekttagbuch – „Herkunft der Zahlen“

PROJEKTTAGEBUCH

von

Woher kommen
die Zahlen?

Projekttagbuch – Seite 1

SPURENSUCHE

ZAHLEN IM ALLTAG

Wann begegnen uns Zahlen im Alltag?



Überlege: Wo begegnen dir Zahlen im Alltag? Wann musst du zählen?
Schreibe Wörter auf oder male Momente, die dir dazu einfallen.



FRÜHER... SCHAFE ZÄHLEN

Wie zählt man Schafe ohne Zahlen?



Die Menschen früher kannten noch keine Zahlen.

Wie hätte ein Hirte überprüfen können, dass seine Herde vollständig ist?

Zählt die Schafe auf den Bildern, ohne Zahlen zu verwenden.

Streicht dafür immer ein Schaf durch und legt für jedes durchgestrichene Schaf eine Bohne in den Becher.

In welchem Glas sind am Ende mehr Bohnen? Sind die Herden gleich groß?

Schätzung: Herde 1

ist größer / ist kleiner / ist gleich

Herde 2

Ergebnis: Herde 1

ist größer / ist kleiner / ist gleich

Herde 2

FRÜHER... ZÄHLKNOCHEN

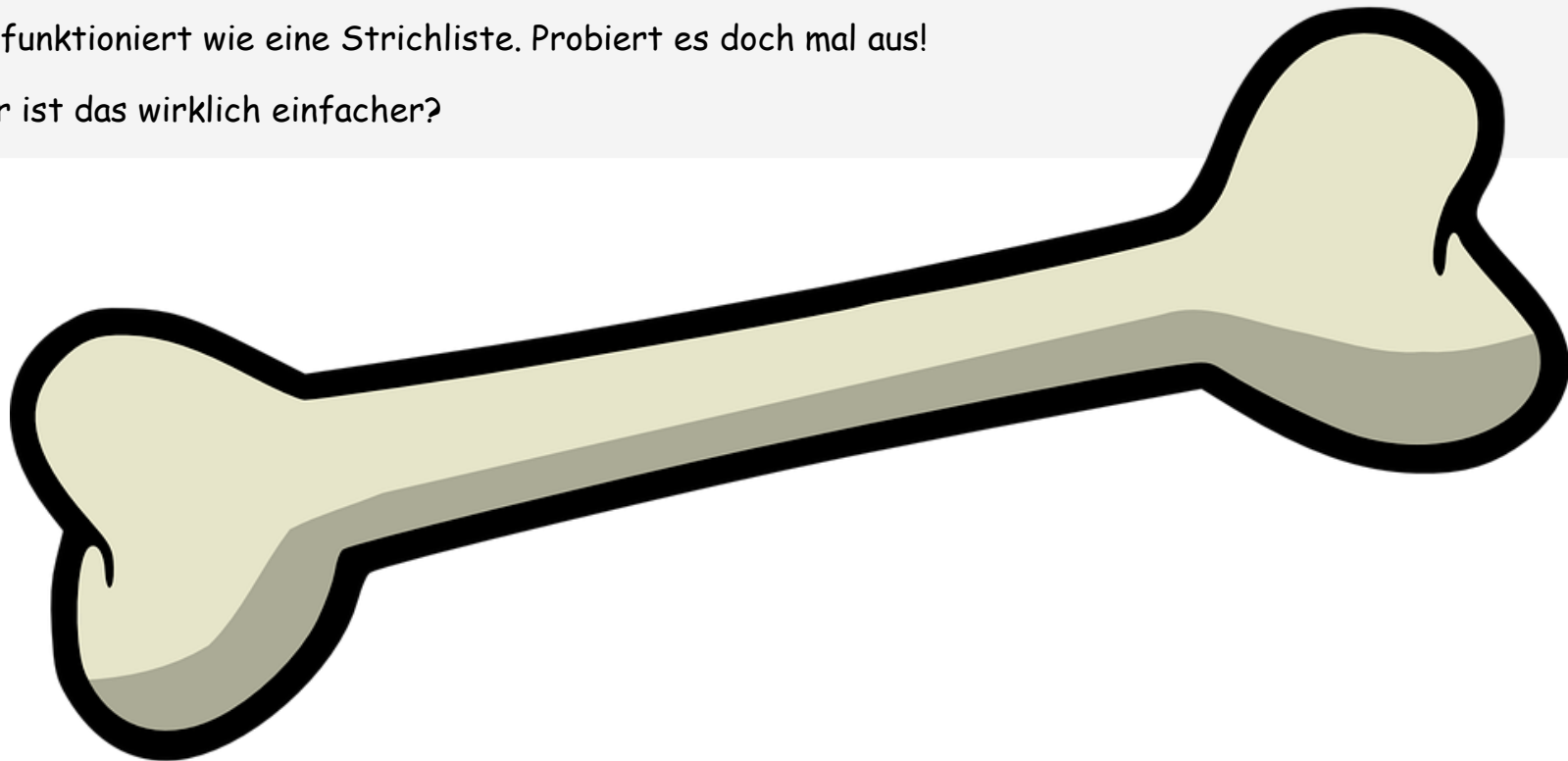
Wie zählt man Schafe ohne Zahlen?



Früher haben die Menschen Kerben in Knochen geschnitzt, wenn sie Zahlen darstellen wollten.

Das funktioniert wie eine Strichliste. Probiert es doch mal aus!

Aber ist das wirklich einfacher?



Projekttagbuch – Seite 4

HEUTE... UNSER ZAHLENSYSTEM

Trage die Anzahl der Schafe in die Tabelle ein.

Z	E

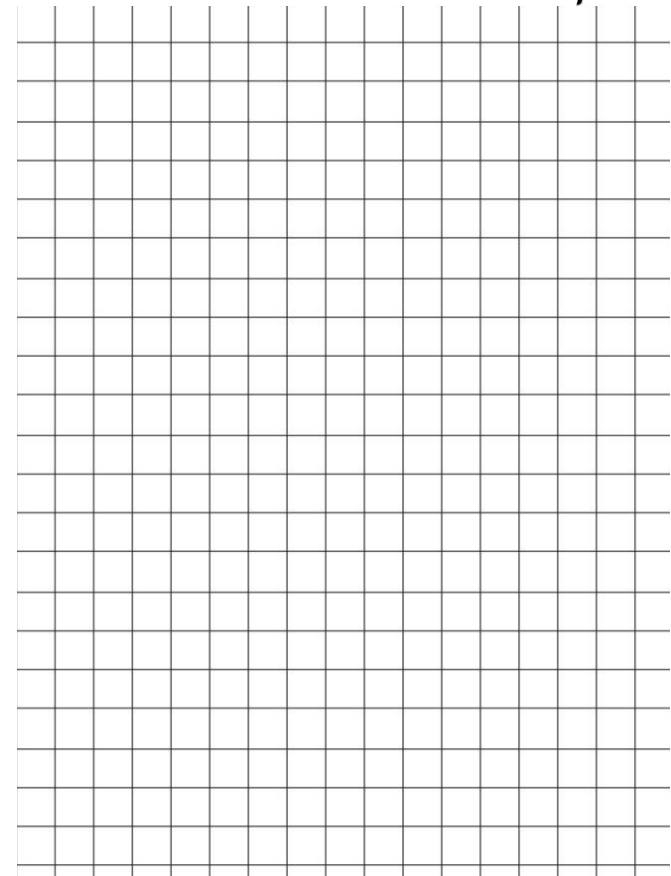
Rechne bis zum Zehner und dann weiter.

$$36 + 9$$

$$77 + 8$$

$$55 + 16$$

Wie funktioniert unser Zahlensystem?



Projekttagbuch – Seite 5

HEUTE... UNSER ZAHLENSYSTEM

Merksatz:

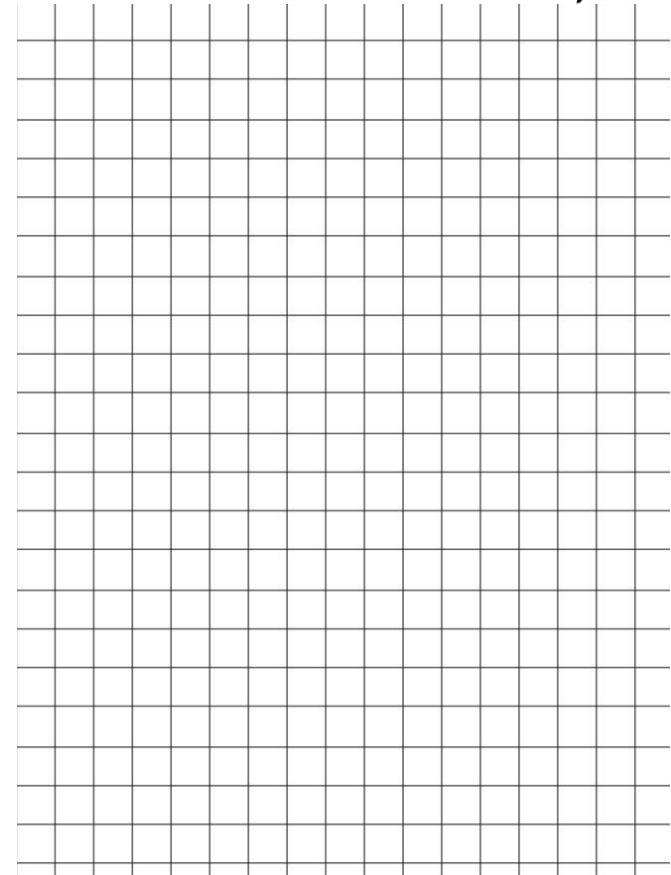
Rechne bis zum Zehner und dann weiter.

$$34 - 7$$

$$22 - 8$$

$$64 - 5$$

Wie funktioniert unser Zahlensystem?



Projekttagbuch – Seite 6

VERGLEICH ANDERE ZAHLENSYSTEME

Wie funktioniert das Zahlensystem der Römer?



Verbinde unsere Zahlen mit den römischen Geheimzahlen.

1	VII	XII	11	6	VI	III	16	
2		XV	VIII	12	7	XX	XIII	17
3	IX	V	13	8	X	XIX	18	
4		IV	XI	14	9	I	XVI	19
5	II	XIV	15	10			20	

Welche Zahlen sind das?

L = _____ C = _____

Kannst du das rechnen?

XI + VII = _____

Wimmelbilder – Schafe zählen



Herde 1



Herde 2