

Wahrscheinlichkeit



Zielgruppe

- Klassenstufe 3 / 4
- Vorerfahrungen der Schüler*innen: Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit
- Vorerfahrungen bezüglich Datenerhebungen vorteilhaft

Inhalt des Beitrags „Warum würfele ich nie eine Sechs?“

- Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit
- Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Wahrscheinlichkeit im Alltag (Lotto, Wettervorhersage)



Lernziele

- Stärkung der Zuhörkompetenz
- Stärkung der Medienkompetenz
- Auditive Erfassung mathematischer Themen
- Entwicklung einer Grundvorstellung von Wahrscheinlichkeit und Zufall
- Umwelterschließung durch Alltagsbezug
- Kennenlernen verschiedener Eintrittswahrscheinlichkeiten
- Kennenlernen der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeiten
- Durchführung, Dokumentation und Auswertung von Zufallsexperimenten

Geförderte überfachliche Kompetenzen

- Kooperations- und Teamfähigkeit
- Rücksichtnahme und Solidarität
- Medienkompetenz
- Kommunikationskompetenz

Geförderte allgemeine mathematische Kompetenzen

- Kommunizieren
- Argumentieren
- Darstellen

Inhaltsfeld

- Daten und Zufall

Sachanalyse des Themas „Wahrscheinlichkeit“

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Als Teilgebiet der Stochastik beschäftigt sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit zufälligen Ereignissen, also Ereignissen, die unter bestimmten Voraussetzungen eintreten können, jedoch nicht müssen (vgl. Neubert 2009, 7). Diese zufälligen Ereignisse entstehen im Rahmen von Zufallsexperimenten, die beliebig oft durchgeführt werden können, deren Ausgänge allerdings weder eindeutig bestimmbar noch vorhersagbar sind (vgl. ebd., 8).

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit als theoretische Größe beschreibt, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Ereignis im Rahmen eines Zufallsexperimentes tatsächlich eintritt (vgl. Häring/Ruwisch 2012, 4). Sie liegt immer zwischen 0 und 1 (0= unmögliches Ereignis; 1= sicheres Ereignis) (vgl. Neubert 2012, 28). Liegt die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 ist das Ereignis möglich, jedoch nicht sicher. Neben einfachen Zufallsexperimenten gibt es auch mehrstufige Zufallsexperimente, die in der Grundschule allerdings keine Rolle spielen.

Klassische Wahrscheinlichkeit

Bei der klassischen Wahrscheinlichkeit, auch Laplace-Wahrscheinlichkeit genannt, sind alle Ausgänge des Zufallsexperimentes gleichwahrscheinlich. Beispiele hierfür sind das Werfen einer Münze oder das Würfeln mit einem klassischen Spielwürfel. Berechnet wird sie durch das Verhältnis der Anzahl der günstigen Ausgänge zur Anzahl aller möglichen Ausgänge (vgl. Neubert 2009, 12).

Statistische Wahrscheinlichkeit

Die statistische Wahrscheinlichkeit lässt sich zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit bei asymmetrischen Zufallsexperimenten nutzen. Ihren möglichen Ausgängen liegt eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit zugrunde (vgl. Neubert 2012, 30). Beispiele hierfür sind das Würfeln mit einem gezinkten Würfel oder das Drehen eines Glücksrades mit unterschiedlich verteilten Feldern. Als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses dient die relative Häufigkeit, die durch zahlreiche Wiederholungen herausgefunden werden kann. Die absolute Häufigkeit beschreibt dabei wie oft das gewünschte Ereignis insgesamt in der Versuchsreihe aufgetreten ist, während die relative Häufigkeit den Anteil des gewünschten Ereignisses in ein Verhältnis zur Anzahl der Versuche setzt. Nach dem Gesetz der großen Zahlen nähert sich bei einer großen Anzahl von Versuchen die relative Häufigkeit der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit an und kann so als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit genommen werden (vgl. ebd.).

Geometrische Wahrscheinlichkeit

Die geometrische Wahrscheinlichkeit nutzt das Vergleichen geometrischer Maße, wie etwa des Flächeninhaltes zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, wie z.B. bei einem Glücksrad (vgl. ebd.).

Unterrichtsablauf der ersten Sequenz

1h

Die Schüler*innen ...

- erheben, dokumentieren und werten Daten aus, indem sie Zahlen würfeln, diese in einer Strichliste festhalten und anschließend über die Ergebnisse sprechen.
- lernen den Begriff ‚Wahrscheinlichkeit‘ kennen und können Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit erkennen, indem sie die gleich großen Seiten eines Spielwürfels wahrnehmen und feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit die einzelnen Zahlen zu würfeln gleich groß ist

Zeit/Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Methoden und Medien
5 Minuten / Begrüßung	Nach der Begrüßung wird den SuS ein Überblick über den Ablauf der Einheit gegeben.	Lehrervortrag
10 Minuten / Einstieg	<p>Radiobeitrag „Warum würfele ich nie eine Sechs?“ (0-1:24 Min) abspielen, die SuS hören zu.</p> <p><i>Inhalt des Radiobeitrags</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>„Spielen des Spiels ‚Mensch ärgere dich nicht‘</i> - <i>„Die Spieler versuchen eine Sechs zu würfeln, was nicht gelingt</i> - <p>Der Ausschnitt aus dem Radiobeitrag wird besprochen, Fragen aufgeworfen und die Vermutungen der SuS besprochen. Folgende Fragen können gestellt werden:</p> <ul style="list-style-type: none"> - „Worum geht es in dem Radiobeitrag?“ - „Ist das wirklich so?“ - „Lässt die Sechs immer länger auf sich warten als andere Zahlen?“ <p>Beispielhaft kann mit den SuS gemeinsam nach einer Sechs gewürfelt werden.</p>	<p>L-S-Gespräch, Sitzkreis</p> <p>Sonstiges: Audio Radiobeitrag, CD-Spieler o.ä.</p>

Methodisch- didaktischer Kommentar

Die Gespräche zu Beginn und am Ende der Stunde sind wichtig, um die allgemeine mathematische Kompetenz des Argumentierens zu fördern. Den SuS wird die Möglichkeit gegeben, Vermutungen gemeinsam aufzustellen und später Ergebnisse zu hinterfragen.

Innerhalb der Arbeitsphase werden die enaktive Ebene durch das aktive Würfeln und die symbolische Ebene durch das Festhalten der Strichliste berücksichtigt. Für ein tieferes Verständnis ist die Verknüpfung dieser Ebenen unumgänglich. Durch das Erheben und Festhalten der Daten wird die allgemeine mathematische Kompetenz ‚Darstellen‘ gefördert.

15 Minuten / Arbeitsphase	Die SuS führen ein Würfelexperiment durch, indem sie in Partnerarbeit würfeln und die gewürfelten Zahlen in Form von Strichlisten festhalten.	SuS-Aktivität, Partnerarbeit AB1: Strichliste Sonstiges: Spielwürfel
15 Minuten / Ergebnis- sicherung	Die Ergebnisse aus der Arbeitsphase werden im Plenum besprochen und mit Hilfe einer Strichliste an der Tafel festgehalten sowie ausgewertet. Auf die Anfangsvermutungen wird Bezug genommen und nach Gründen für das Ergebnis gesucht. Somit kann der Begriff ‚Wahrscheinlichkeit‘ eingeführt und eine Vorstellung davon entwickelt werden.	L-S-Gespräch, Sitzordnung AB1: Strichliste Sonstiges: Tafel, Kreide

Unterrichtsablauf der zweiten Sequenz

2h 2h

Die Schüler*innen ...

- lernen Begriffe der Wahrscheinlichkeit kennen, indem sie einen Text lesen und Fragen dazu beantworten.
- nehmen die Wahrscheinlichkeit des Eintritts von verschiedenen Ereignissen wahr, indem sie ‚Spiele‘ mit bestimmten Regeln ausprobieren und begründen, ob diese fair sind.

Zeit/Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Methoden und Medien
10 Min / Einstieg	Hinführung Stationsarbeit: Vorstellen der Stationen (Aufbau), Vorstellen des Laufzettels in Tafelform	Lehrervortrag, Sitzkreis
150 Min / Arbeitsphase (Unterbrechungen durch Pausen notwendig)	Die SuS bearbeiten selbstständig verschiedene Stationen zu den Themen Wahrscheinlichkeit, Zufall, Würfel und Glücksrad Als Laufzettel werden die Namen der SuS und die Namen der Stationen in tabellarischer Form an der Tafel dargestellt, so dass die SuS selbstständig die bearbeiteten Stationen abhaken können. Für die schnellen SuS besteht die Möglichkeit, zwei weitere Arbeitsblätter zu bearbeiten.	SuS-Aktivität, Stationsarbeit, je nach Station Einzel- oder Partnerarbeit möglich Alle ABs der Sequenz 2: Stationen Sonstiges: Spielwürfel, Glücksräder, CD-Spieler, Tafel, Kreide, Schere
20 Minuten / Ergebnis- sicherung	Die Stationsarbeit wird durch das Vorstellen der wichtigsten Erkenntnisse aus den einzelnen Stationen reflektiert. Zudem können Probleme, Fragen und wichtige Punkte aus der Stationsarbeit aufgegriffen und thematisiert werden.	<u>L-S-Gespräch, Sitzkreis</u> Sonstiges: Schülerprodukte der Stationen

Methodisch- didaktischer Kommentar

Durch die Stationsarbeit wird das selbstständige Erarbeiten gefördert und Verantwortung für das eigene Lernen übernommen. Durch das freie Arbeiten wird der Umgang miteinander und das Geben von gegenseitiger Hilfe notwendig. Dadurch werden die überfachlichen Kompetenzen ‚Kooperation und Teamfähigkeit‘ sowie ‚Rücksichtnahme und Solidarität‘ gefördert.

Die einzelnen Stationen fördern den Aufbau der allgemeinen mathematischen Kompetenzen ‚Argumentieren‘, ‚Darstellen‘ und ‚Kommunizieren‘.

Die abschließende Reflexion ist besonders wichtig, da Fehlvorstellungen korrigiert und Verständnisschwierigkeiten gelöst werden können.

Zur Stationsarbeit

Alle Stationen sollten mindestens in zweifacher Ausführung vorhanden sein. Hierdurch erhalten die Schüler*innen noch mehr Freiheit in der Wahl der Reihenfolge der Bearbeitung. Für die Zusatzstationen genügt das Vorhandensein einer Ausführung. Als Grundlage für die Erstellung der Stationsmaterialien dienten Häring/Ruwisch (2012), PIKAS (o.D.), Bettner/Dinges (2011).

Station Irgendwo:

Benötigtes Material: Bildkarten, Stationskarte, Lösungsblatt, Arbeitsblatt

An dieser Station erhalten die Lernenden die Möglichkeit, sich über die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit und deren Verwendung bewusst zu werden. Dazu lesen die Schülerinnen und Schüler einen kurzen Text mit dessen Hilfe sie im Anschluss einige Fragen beantworten sollen. Hierbei wird die richtige Verwendung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit geübt. Als Hilfestellung stehen Bildkarten unterschiedlicher Größe zur Verfügung, die die Auftrittswahrscheinlichkeit verdeutlichen sollen. Für die Möglichkeit der Selbstkontrolle liegt der Station ein Lösungsblatt bei, das die Schüler und Schülerinnen nach Beantwortung der Fragen nutzen können.

Station „Wer gewinnt?“

Benötigtes Material: 2 Spielwürfel, Spielkarten, Stationskarte, Arbeitsblätter

An dieser Station können die Lernenden erste Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit zwei Würfeln sammeln. Zu Beginn sollen die Schülerinnen und Schüler hierfür einschätzen, ob sie das der Station zugrundeliegende Spiel fair finden. Dieses besteht darin, dass die Bank und der Spieler gegeneinander mit zwei Würfeln würfeln. Die Augenzahlen werden addiert. Der Spieler gewinnt beim Ergebnis 1, 2, 3, 4, 10, 11. Die Bank gewinnt bei 5, 6, 7, 8, 9. Die Schüler und Schülerinnen sollen ihre Entscheidung bezüglich der Fairness des Spiels begründen. Anschließend wird die vorgenommene Vermutung mittels der Durchführung eines Würfelexperimentes überprüft. Hierfür würfeln die Schülerinnen und Schüler mindestens 30-mal mit zwei Würfeln, addieren die Augenzahlen und halten die Ergebnisse in der beiliegenden Tabelle fest. Mit den durch das Experiment gewonnenen Kenntnissen sollen die Lernenden zum Abschluss die Richtigkeit ihrer Vermutung überprüfen und diese gegebenenfalls korrigieren.

Station „Glücksrad-Experiment“

Benötigtes Material: Abspielgerät für den Radiobeitrag, Glücksräder, Stationskarte, Arbeitsblätter, Lösungsblatt, gegebenenfalls Kopfhörer

Im Rahmen dieser Station werden die Lernenden insbesondere durch das genaue Zuhören in der Konfrontation mit einem erneuten Ausschnitt des Radiobeitrags (8:51-10:08 Min) gefordert. Dabei geht es um das Ausrechnen der Wahrscheinlichkeit bei einem Glücksrad. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Ausschnitt anhören und anschließend Fragen zum Gehörten beantworten. In Anlehnung an die Geschehnisse im Radiobeitrag finden die Lernenden auf dem Arbeitsblatt zwei Glücksräder mit unterschiedlicher Verteilung der Felder. Die Schüler und Schülerinnen sollen nun entscheiden, welches der Glücksräder eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit aufweist und ihre Entscheidung begründen. Die vorgenommene Einschätzung überprüfen die Schüler und Schülerinnen im Anschluss durch ein Experiment, indem sie selbst die besagten Glücksräder je 30-mal drehen und die Ergebnisse in die beiliegende Strichliste

eintragen. Mit den gewonnenen Erkenntnissen sollen die Lernenden zum Abschluss das Ergebnis des Experiments begründen.

Station „Gewinnchance vergleichen“

Benötigtes Material: Wahrscheinlichkeitsstreifen, Glücksräder, Stationskarte, Arbeitsblatt, Lösungsblatt

Die Schülerinnen und Schüler lernen an dieser Station mit den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ umzugehen, diese zu verstehen und passend anzuwenden. Gemeinsam mit ihrem Partner überlegen die Lernenden, ob es sicher, möglich oder unmöglich ist, dass das jeweilige Glücksrad gewinnt. Dies tragen sie in das Arbeitsblatt ein. Anschließend ordnen sie die Glücksräder nach ihren Gewinnwahrscheinlichkeiten am Wahrscheinlichkeitsstreifen an.

Station Schatzsuche:

Benötigtes Material: 2 Spielwürfel, Spielplan, Spielerkarten, Goldtaler zum Ausschneiden, Arbeitsblatt

Hierbei sollen die Kinder in Partnerarbeit anhand eines Spiels die Gewinnchancen beim Würfeln mit zwei Würfeln vergleichen. Nach den Spielregeln gewinnt Spieler A bei den Augensummen 3, 4, 5 und Spieler B bei 6, 7, 8 und darf somit ein Feld auf dem Spielplan vorwärts ziehen. Der Spieler, der zuerst bei der Schatzkiste ankommt, erhält eine Goldmünze. Nach fünf Runden ist das Spiel beendet. Nach dem Spiel werden die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt über das Ergebnis nachzudenken und Begründungen zu suchen.

Sternchen-Station Farbwürfel-Farbverteilung vermuten (roter Stern):

Benötigtes Material: Stationskarte, Arbeitsblätter, Lösungsblatt

Die Schülerinnen und Schüler erhalten an dieser Station die Möglichkeit ihr bisher erworbenes Wissen über Strichlisten und den klassischen Würfel auf den Farbflächenwürfel zu übertragen. Die Aufgabe besteht darin, die aufgemalten Würfel den ebenfalls aufgeführten Strichlisten zuzuordnen. Dabei müssen die Lernenden die Farbwürfel genau hinsichtlich des Vorkommens der Farben untersuchen, die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln der Farben einschätzen und in Bezug zu den vorhandenen Strichlisten setzen. Weiterhin dient das Arbeitsblatt mit der Fragestellung „Was fällt dir auf?“ dazu, die gewonnenen Erkenntnisse noch einmal zu reflektieren.

Sternchen-Station Farbwürfel-Experiment (gelber Stern):

Benötigtes Material: Stationskarte, Arbeitsblatt, Tippkarten

Die Aufgabe an dieser Station besteht in der Durchführung eines Würfelexperiments mit zwei unterschiedlichen Farbwürfeln. Die Lernenden sind hierbei dazu aufgefordert, zuerst mit einem und anschließend mit dem anderen der beiden Würfel jeweils 30-mal zu würfeln und die Ergebnisse in zwei Strichlisten festzuhalten. Anschließend sollen die Schüler und Schülerinnen die Strichlisten miteinander vergleichen, eventuell entstandene Unterschiede notieren und Vermutungen über Gründe hierfür aufstellen.

Sternchen-Station Schatzsuche (blauer Stern):

Benötigtes Material: 2 Spielwürfel, Spielplan, Stationskarte, Spielerkarten (wenn möglich einlaminiert), 5 Goldtaler, abwaschbarer Folienstift

Diese Station baut auf der Basis-Station Schatzsuche auf. Auch hier würfeln die Kinder mit zwei Würfeln, addieren die Augenzahl und rücken beim Wurf einer ihrer Zahlen ein Feld auf dem Spielplan vor. Das Besondere an dieser Station besteht jedoch nun darin, dass die Lernenden selbst die Zahlen auswählen sollen, bei denen jeweils einer der beiden Spieler vorwärtsrücken darf. Zudem soll die selbstgeschaffene Regel für beide Spieler fair sein. Die Lernenden müssen also genau überlegen, welche Würfelsummen mit etwa gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten und diese fair verteilen. Die ausgewählten Zahlen notieren die Schülerinnen und Schüler sodann mit Folienstift auf die Spielerkarten und beginnen damit das Spiel nach den selbstgewählten Regeln zu spielen.

Sternchen-Station Schulleben (grüner Stern):

Benötigtes Material: Lückenkarten zum Ausschneiden, Stationskarte, Arbeitsblatt, Lösungsblatt

Im Rahmen dieser Station wird der Umgang mit den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit vertieft. Hierfür füllen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Lückenkarten und unter Einbezug ihres zuvor erworbenen Wissens zum Thema Wahrscheinlichkeit einen Lückentext aus. Haben die Lernenden diese Aufgabe erfolgreich bewältigt, dürfen sie mit Hilfe eines Lösungsblattes die von ihnen eingetragenen Begriffe auf Richtigkeit überprüfen. Die richtigen Begriffe sollen die Schüler und Schülerinnen anschließend auf ihr eigenes Arbeitsblatt übertragen.

Unterrichtsablauf der dritten Sequenz **1h**

Die Schüler*innen...

- bringen die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit mit Alltagsbegriffen in Verbindung, indem sie die Begriffe einander zuordnen.
- wenden die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit sachgerecht an, indem sie Alltagsbeispiele nennen.

Zeit/Phase	Geplanter Unterrichtsverlauf	Methoden und Medien
5 Min / Einstieg	Nach der Begrüßung werden Ausschnitte aus dem Radiobeitrag „ Warum würfele ich nie eine Sechs? “ abgespielt. (3:48-4:57 Min) <i>Inhalt des Radiobeitrags</i> <i>Den Alltagsbegriffen ‚häufig, selten, immer, nie‘ werde:n die Begriffe ‚sehr wahrscheinlich, unmöglich, sicher, weniger wahrscheinlich‘ zugeordnet.</i>	SuS-Aktivität, Sitzkreis Sonstiges: Audio Radiobeitrag, CD-Spieler
15 Min / Arbeitsphase I	An der Tafel befinden sich die Begriffe (sicher, sehr wahrscheinlich, weniger wahrscheinlich, unmöglich; häufig, selten, immer, nie). Die SuS erklären, ordnen diese einander zu und nennen eigene Alltagsbeispiele. Begleitet wird dies durch die Lehrkraft.	L-S-Gespräch, Sitzordnung Begriffskarten I + II
15 Min / Erarbeitung II	Die Lernenden verändern ihre Papierflieger, bzw. falten neue, um ein noch besseres Flugergebnis zu erzielen. Im Anschluss werden die Flieger wieder auf dem Schulhof fliegen gelassen, die Flugweite erneut gemessen und mit dem alten Ergebnis verglichen.	SuS-Aktivität, Einzel- oder Partnerarbeit, Plenum Sonstiges: DIN-A4-Blätter, Papier
25 Min / Ergebnis- sicherung	Als Abschluss der Einheit wird eine Ergebnissicherung mit Fragen zu den Inhalten des Radiobeitrags und der Stationsarbeit durchgeführt. Hierbei können die acht Fragen, angepasst an die Lerngruppe, in einer beliebigen Quizform (bspw. ‚Eins, zwei oder drei‘) gestaltet werden. Die richtigen Antworten werden nach der Auflösung noch einmal erläutert.	SuS-Aktivität Quizfragen Sonstiges: Spielmaterial: Klebeband,

Methodisch-didaktischer Kommentar

Durch die genaue Auseinandersetzung mit den verschiedenen Begriffen und das in Verbindung bringen mit Alltagssituationen wird die allgemeine mathematische Kompetenz ‚Kommunizieren‘ gefördert.

Literaturverzeichnis

- Bettner, Marco; Dinges, Erik (2011): Stochastik an Stationen. Rechnen mit Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit. Klassen 3 und 4. Donauwörth: Auer Verlag.
- Eichler, Andreas; Vogel, Markus (2013): Leitidee Daten und Zufall. Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Häring, Gudrun; Ruwisch, Silke (2012): Die Wahrscheinlichkeitsbox Grundschule. Zufallsversuche durchführen und auswerten. Gewinnchancen einschätzen. Seelze: Kallmeyer Lernspiele.
- Hessisches Kultusministerium (2011): Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Primarstufe. Mathematik. Wiesbaden: HKM.
- Neubert, Bernd (2012): Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule. Offenburg: Mildenerger Verlag.
- Neubert, Bernd (2009): Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Grundschule. [online] https://www.schulportal-thueringen.de/c/document_library/get_file?folderId=573998&name=DLFE-83219.pdf [16.06.2017].
- Pallack, Andreas; Schmidt, Ursula (Hrsg.) (2012): Daten und Zufall im Mathematikunterricht. Mit neuen Medien verständlich erklärt. Berlin: Cornelsen Verlag.
- PIKAS (o.D.): Glücksspiele: Glücksräder, Würfel. Dortmund: Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. [online] <https://pikas.dzlm.de/node/721> [28.07.2017].
- Schipper, Wilhelm; Ebeling, Astrid; Dröge, Rotraut (2017): Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel Westermann.